

$\int \sqrt{\text{Mathe I / TFH Berlin}}$
Das alternative Matheskript

Torben Zech
18. November 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Matritzen	5
2.1	allg.	5
2.2	Rechenregeln	5
2.2.1	Addition	5
2.2.2	Skalarmultiplikation	5
2.2.3	Falk-Schema u. Matrizen/Vektormultiplikation	5
2.3	Transponierte Matrix	6
2.4	Determinanten	6
2.5	Cramer'sche Regel	7
2.6	inverse. Matrix / Einheitsmatrix	8
3	Logarithmen	9
3.1	Rechenregeln	10
3.2	e -Funktionen spezieller Natur	10
4	Einfache Funktionen bis 3. Grades	11
4.1	Rekonstruktion durch Scheitelpunktform	11
4.2	Polynomdivision	11
5	Differentialrechnung	12
5.1	def. einer Ableitung	12
5.2	Grenzwerte	12
5.3	Grenzwerte nach La Hospital / Johann Bernoulli	12
5.3.1	"SStärke" der Grenzwerte	13
5.4	Ableitungsregeln	13
5.5	Faktorregel	13
5.6	Produktregel	13
5.7	Quotientenregel	13
5.8	Kettenregel / Koenigsregel	14
5.9	Tangentengleichung	14
5.10	spezielle Ableitungen (sin, cos, ln...)	15
5.11	partielle Ableitungen	15
5.12	Kurvendiskusion	15
5.12.1	Extrema	15
5.13	Praktische Anwendung der Differentialrechnung	15
6	Integralrechnung	16
6.1	Die Stammfunktion	16
6.2	Spezielle Stammfunktionen	17
6.3	Beispiele f. Stammfunktionen	18
6.4	bestimmtes Integral	18

6.5	Uneigentliche Integrale	21
6.6	Integration durch Substitution	22
6.7	Partielle Integration	22
6.8	Wegintegrale	23
7	Additionstheoreme / Trig. Zusammenhänge	23
8	Schwingungen	24
9	Vektorrechnung	24
9.1	Addition und Subtraktion	24
9.2	Linearkombination, Faktormultiplikation	25
9.3	Darstellung von Vektoren	25
9.4	Länge	25
9.5	Winkel	26
9.6	Geraden	26
9.7	Skalarprodukt	26
9.8	Vektorprodukt/Kreuzprodukt	27
9.9	Beispiele	27
10	Kreise	29
11	Quadratische Ergänzung	29
12	Ablezen von log. Skala	29

1 Vorwort

Diese Skripte sind eine zum Teil rudimentäre Zusammenfassung des Stoffes des Semesters und sind keine Lehrbücher und Entschuldigungen nicht zu Vorlesungen gehen und/oder Übungen nicht zu machen. Teile davon sind nach Mitternacht aufgeschrieben und Teile sind gar nicht oder nur flüchtig Korrektur gelesen. Andererseits bin ich für Fehlermeldungen sehr dankbar.

Ebenso vielen Dank an Fabian Zohm für die Vektorrechnung und seine ewige Geduld mit mir und nicht zu vergessen viele die mich ermutigt haben dies hier zu schreiben. Viele Zeichnungen sind unter aller Sau, aber ich denke sie erfüllen ihren Zweck. Ebenso Dank an Prof. Fr. Diercksen, meine Mathe Dozentin.

Skripte zum Nachschlagen im Internet → [Skriptum Dirk Ferus](#)

100% in \LaTeX geschrieben.

Version vom 18. November 2006

2 Matrizen

2.1 allg.

Eine Matrix ist ein Zweidimensionales Mathematisches Gebilde, in denen sich Werte bzw. Formeln fassen lassen. Eine Matrix hat Zeilen und Spalten, wobei $n \times m$ sei. Man Merke: *Zeilen x Spalten*. Die Indexierung erfolgt folgendermaßen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2.2 Rechenregeln

2.2.1 Addition

Es seien A und B zwei 2×2 Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

Die Addition von Matrizen ist kommutativ, d.h. $\mathbf{A + B = B + A}$

2.2.2 Skalarmultiplikation

Es gelten die Matrizen von oben. Sei jetzt gegeben: $2 \cdot A = C$, dann ist

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot A_{11} & 2 \cdot A_{12} \\ 2 \cdot A_{21} & 2 \cdot A_{22} \end{pmatrix}$$

Merke: **Bei der Multiplikation einer Festen Zahl vor einer Matrix wird jedes Element mit dieser Multipliziert**

2.2.3 Falk-Schema u. Matrizen/Vektormultiplikation

Es herrscht folgendes Problem : Es sollen die Matrizen A und B multipliziert werden. Dafür benutzt man das Falk Schema.

Achtung: Bei der Matrizenmultiplikation gilt das Kommutativgesetz nicht, d.h. $\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 16 & 28 \end{pmatrix}$$

Ebenso muss drauf geachtet werden, dass nach dem Falkschema nur zwei Matrizen multipliziert werden dürfen, wenn die erste Matrix $n \times m$ mit der 2. Matrix dessen übereinstimmt

2.3 Transponierte Matrix

Eine Transponierte Matrix ist nichts weiteres, ausser dass Zeilen und Spalten vertauscht worden. Beispiel:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

→ Eine transponierte Matrix wieder transponiert ergibt die Ausgangsmatrix

2.4 Determinanten

Die Determinante einer simplen 2×2 Matrix errechnet sich folgendermaßen: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Bei Matrizen von $n \times n$, $n > 3$ benutzt man folgende Formel:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \quad (1)$$

Für Matrizen $n \times n$, $n > 3$ gilt der Entwicklungssatz von La Place:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

Das verfahren geht folgendermaßen:

- Streichung einer Spalte, am besten derer, wo am Meisten Nullen stehen.
- Streichung der ersten Zeile
- Wenn man sich die Matrix neu aufschreibt, entsteht eine neue 3×3 Matrix, welche man nach der Formel oben erneut die Determinante berechnen kann
- Jetzt wird die nächste Zeile gestrichen und die erste wieder "hergestellt". Diesen Vorgang wiederholt man bis man die Matrix bis unten durchgearbeitet hat.
- Am Ende bekommt man drei Determinanten, nennen wir sie d_1, d_2, d_3, d_4 .
- Unterteilung des Matrixfeldes in ein Schachbrettmuster, d.h. jedes 2. Element wird mit (-1) Multipliziert. Am Ende sieht die Matrix dann folgendermaßen aus:

$$A' = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ -e & f & -g & h \\ i & -j & k & -l \\ -m & n & -o & p \end{pmatrix}$$

- Jetzt multiplizieren wir die Zahlen aus der gestrichenen Spalte (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) mit den errechneten Determinanten. In unserem Falle haben wir die 3. Zeile gestrichen.

$$\det(A) = c \cdot \det(d_1) + (-g) \cdot \det(d_2) + k \cdot \det(d_3) + (-o) \cdot \det(d_4) \quad (2)$$

→ Bis jetzt können wir nur Determinanten nur aus $n \times n$ Matrizen berechnen

→ Ist $\det(A) \neq 0$ dann ist die Matrix **regulär**, andernfalls ($\det(A) = 0$) ist die Matrix **singulär**, nicht eindeutig lösbar.

2.5 Cramer'sche Regel

Die Cramer'sche Regel gibt Hilfe beim lösen von linearen Gleichungssystemen. Es sei ein LGS gegeben:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \quad (3)$$

$$-5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \quad (4)$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \quad (5)$$

(6)

Es sind x_1, x_2, x_3 gesucht. Jetzt entwerfen wir eine Matrix mit dem LGS:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem benötigen wir einen Lösungsvektor \vec{k} , in den wir unsere Lösungen einsetzen.

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- jetzt berechnen wir die Determinante von A, nennen wir sie D
- Wir setzen jetzt den Lösungsvektor in die Spalte i der Matrix A ein, berechnen daraus die Determinante D_i .

- Hieraus können wir ableiten:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (8)$$

$$x_2 = \frac{D_3}{D} \quad (9)$$

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (10)$$

2.6 inverse. Matrix / Einheitsmatrix

Eine Inverse Matrix, hat die eigenschaft, dass sie mit der Ausgangsmatrix eine Einheitsmatrix (E) ergibt.

$$A^{-1} \cdot A = E \quad (11)$$

Eine Einheitsmatrix, ist eine Matrix, dessen Determinante Null ist.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle Elemente der Matrix sind Null, bis auf die Diagonale, welche aus Einsen besteht. Eine Verwendung für dieses Problem ist folgendes Beispiel:

$$A \cdot \vec{k} = \vec{z} \quad (12)$$

Gegeben seien jetzt der Vektor \vec{z} , die Inverse Matrix von A. Gesucht ist \vec{k} . Um dieses Problem gibt es folgendes Schema:

- Multiplizieren der Gleichung mit A^{-1}
- Dadurch lautet die Gleichung $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=1} \cdot \vec{k} = A^{-1} \cdot \vec{z}$

- da $A^{-1} \cdot A = 1$ lautet die Gleichung jetzt $\vec{k} = A^{-1} \cdot \vec{z}$
- Damit lässt sich diese Gleichung lösen.
- Wichtig: Nie die Seiten vertauschen, da Matrizen nicht kommutativ sind. Am besten nach dem unterstehenden Beispiel richten.

Beispiel:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2.5 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gesucht: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = C \mid \cdot A^{-1} \quad (13)$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=1} \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad (14)$$

damit ist die Gleichung trivial.

3 Logarithmen

Der Logarithmus beschäftigt sich mit der Frage nach dem Exponenten. Beispiel für einen Logarithmus: es sei

$$2^x = 15 \quad (15)$$

Jetzt wird nach dem Exponenten x gefragt. Um das jetzt nach x aufzulösen, müssen wir logarithmieren. Dann ist

$$x = \frac{\log 15}{\log 2} = 3.906 \quad (16)$$

Allgemeiner bedeutet dies:

$$b^x = a \quad (17)$$

$$x = \frac{\log a}{\log b} \quad (18)$$

In logarithmischer Schreibweise ausgedrückt: $a = \log_x b$, Sprich logarithmus von b zur Basis x . Andere Beispiele:

$$\log_{10} 1000 = 3, \text{ da } 10^3 = 1000 \quad (19)$$

$$\log_e 2.71828 = 1, \text{ da } e^1 = 2.71828 \quad (20)$$

3.1 Rechenregeln

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad (21)$$

$$b^{\log_b x} = x \quad (22)$$

$$\log_b(b^x) = x \quad (23)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x) \quad (24)$$

3.2 e -Funktionen spezieller Natur

Man hat eine Bierflasche in den Kühlschrank gestellt zur Zeit T_0 mit der Temperatur T_K . Der Verlauf der Temperatur lautet:

$$T(t) = (T_0 - T_K)e^{-at} + T_K \quad (25)$$

mit $T_0 = 19^\circ\text{C}$, $T_K = 7^\circ\text{C}$, $a = 0.012\text{min}^{-1}$.

Wann hat die Flasche 8°C erreicht? Lösung:

$$8\text{C} = (19\text{C} - 7\text{C})e^{\frac{-0.012t}{\text{min}}} + 7\text{C} \quad (26)$$

$$1\text{C} = 12\text{C} \cdot e^{\frac{-0.012t}{\text{min}}} \quad | : 12\text{C} \quad (27)$$

$$\frac{1}{12} = e^{\frac{-0.012t}{\text{min}}} \quad | \ln \quad (28)$$

$$\ln\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{-0.012t}{\text{min}} \quad | \cdot \text{min} \quad (29)$$

$$\ln\left(\frac{1}{12}\right)\text{min} = -0.012t \quad | \cdot \frac{1}{-0.012} \quad (30)$$

$$t = 207\text{min} \quad (31)$$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{0.3\text{ms}}} \quad (32)$$

$$q(t_1) = \frac{q_0}{10} = q_0 e^{\frac{t_1}{0.3\text{ms}}} \quad (33)$$

$$\frac{1}{10} = e^{\frac{t_1}{0.3\text{ms}}} \quad (34)$$

$$t_1 = 0.3\text{ms} \cdot \ln(10) \quad (35)$$

Tangentengleichung an der Stelle $t = 0$.

$$u(t) = u_0(1 - e^{-\frac{t}{5\text{s}}}) \quad (36)$$

$$t(x) = u(0) + u'(0) \cdot (t - 0) \quad (37)$$

$$u'(t) = u_0(-e^{-\frac{t}{5\text{s}}}) \cdot \left(-\frac{1}{5\text{s}}\right) = \frac{u_0}{5\text{s}} e^{-\frac{t}{5\text{s}}} \quad (38)$$

$$t(x) = \frac{u_0}{5\text{s}} t \quad (39)$$

4 Einfache Funktionen bis 3. Grades

4.1 Rekonstruktion durch Scheitelpunktform

Gegeben: Parabel mit bekannten Punkten (1|1.5) und (4|6) und dem Scheitelpunkt $x_s = 2$.
Bestimmung mit der Scheitelpunktform:

$$a_2(x - x_s)^2 + y_s \quad (40)$$

$$a_2(x - 2)^2 + y_s \quad (41)$$

jetzt Punkte einsetzen! (42)

$$1.5 = a_2(1 - 2)^2 + y_s \quad (43)$$

$$6 = (4 - 2)^2 + y_s \quad (44)$$

beide Gleichungen voneinander abziehen! (45)

$$f(x) = (1.5(x - 2)^2) = 1.5x^2 - 4x + 4 \quad (46)$$

Fall: S-Pkt. um 3 verschieben (47)

$$y_{s2} = 1.5(x - 2 \underbrace{-3}_{\text{versch.}})^2 \quad (48)$$

4.2 Polynomdivision

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 2 \\
 x - 1 \overline{) x^3 + x^2 - 1} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 2x^2 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 2x - 1 \\
 \underline{-2x + 2} \\
 1
 \end{array}$$

5 Differentialrechnung

5.1 def. einer Ableitung

Eine Ableitung sagt, die groß die Steigung einer Funktion in einem bestimmten Punkt ist. Es sei $f(x) = 3x^2$, eine differenzierbare Funktion. Die Funktion, $f'(x) = 6x$ (Ableitung). Das Prinzip ist, dass man durch die Kurve eine Sekante legt und den Abstand zwischen den Punkten auf Null annähert. Daraus ergibt sich eine Tangente, welche die Kurve nur noch in einem Punkt schneidet. Diese sagt jetzt etwas über die Steigung aus. Setzt man jetzt für x einen beliebigen Punkt ein, erhält man als Funktionswert die Steigung der Ausgangsfunktion im Punkt x . Folglich sind Extrema wie Tief- und Hochpunkte in der Ableitung Null, dazu später in der Kurvendiskussion.

5.2 Grenzwerte

Ein Grenzwert muss man sich als solches vorstellen, was eine Funktion macht, wenn sie ins Unendliche abdriftet. Dies zeigt man durch die Math. Funktion Limes ($\lim_{x \rightarrow y}$). Bei einer Funktion, z.B. $f(x) = 3x^2 + 7$ will man gucken, wie sich der Grenzwert im Unendlichen verhält \Rightarrow Unendlichkeitsverhalten. Hierfür setzt man für x einen großen Wert ein, z.B. 1000000 und guckt wie sich der Funktionswert verhält. In unserem Fall wär das: $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 + 7 = \infty$. Das heißt, der Grenzwert dieser Funktion geht gegen Unendlich.

5.3 Grenzwerte nach La Hospital / Johann Bernoulli

Dieses Hilfsmittel ist für Grenzwertprobleme wie z.B.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{0} \quad (49)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{x}{e^x} = \infty \cdot 0 \quad (50)$$

Jetzt wird aus dem Ausdruck ein Bruch gemacht. daraus folgt dann

$$\text{a) } \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} \quad (51)$$

$$\text{b) } \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^x} \quad (52)$$

Jetzt werden Zähler und Nenner **getrennt** abgeleitet. Daraus ergibt sich dann

$$\text{a) } \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)}{1} = \frac{\cos(1) = 1}{1} = 1 \quad (53)$$

$$\text{b) } \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} e^x} = 0 \quad (54)$$

Fidet sich bei der ersten Ableitung kein brauchbarer Grenzwert, kann man diesen Ausdruck beliebig ableiten bis sich was sinnvolles findet.

5.3.1 SStärke"der Grenzwerte

Wenn man eine Funktion mit mehreren "Teilfunktionen" hat, dann entscheidet sich der Grenzwert nach der stärksten Funktion. Am Stärksten sind Exponentialfkt, dann Potenzen und dann Logarithmen.

$$\text{exp - Fkt.} \ll \text{Potenzen} \ll \text{Logarithmen} \quad (55)$$

5.4 Ableitungsregeln

5.5 Faktorregel

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$. Nun wird jeder Faktor einzeln abgeleitet. Damit ist

$$f'(x) = 6x + 2 \quad (56)$$

$$\text{allgemein: } f'(x) = a'(x) + b'(x) + c'(x) + \dots \quad (57)$$

5.6 Produktregel

Es sei $f(x) = \ln(x) \cdot x$. Nun sei $\ln(x)$ $u(v)$ und $xv(x)$. Nun gilt:

$$f(x) = \ln(x) \cdot x \quad (58)$$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad (59)$$

$$\text{mit } u(x) = \ln(x) \text{ und } v(x) = x \quad (60)$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \text{ und } v'(x) = 1 \quad (61)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (62)$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \quad (63)$$

$$f'(x) = \ln(x) + 1 \quad (64)$$

Beispiel 2:

$$f(x) = e^{2x} \cdot x^2 \quad (65)$$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad (66)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (67)$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \cdot x^2 + e^{2x} \cdot 2x \quad (68)$$

$$\text{durch Ausklammern } f'(x) = x \cdot e^{2x} \cdot (2x + 2) \quad (69)$$

5.7 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad (70)$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad (71)$$

5.8 Kettenregel / Koenigsregel

Diese Regel benutzt man für Funktionen, welche ineinander verkettet sind. Die Regel erfordert recht viel Übung, aber nach einiger Zeit stellt sich dafür ein Gefühl ein und geht von Hand.

Es sei $f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 2) = u(v(x)) \cdot u$, die äußere Funktion ist $\ln(x) \cdot v$, die innere Funktion ist $3x^2 + 2x - 2$. Die Kettenregel, formell ausgedrückt lautet: $u(v(x)) \frac{d}{dx} = u'(v(x)) \cdot v'(x)$. Für unser Beispiel bedeutet dies:

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 2) \quad (72)$$

$$f(x) = u(v(x)) \quad (73)$$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (74)$$

$$u(x) = \ln(x) \text{ und } v(x) = 3x^2 + 2x - 2 \quad (75)$$

$$\text{aus } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ und } v'(x) = 6x + 2 \quad (76)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x - 2} \cdot 6x + 2 \quad (77)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x - 2} \quad (78)$$

$$= \frac{2(3x + 1)}{2(1.5x^2 + x - 1)} \quad (79)$$

Beispiel 2:

$$f(x) = 2 \cdot \cos(3x) \quad (80)$$

$$f(x) = u(v(x)) \quad (81)$$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (82)$$

$$u(x) = \cos(x) \text{ und } v(x) = 3x \text{ und } u'(x) = -\sin(x) \quad (83)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -6 \cdot (\sin(3x)) \quad (84)$$

5.9 Tangentengleichung

Eine Tangentengleichung ist eine Funktion, mit derer man an eine beliebige Funktion eine Tangente in einem beliebigen Punkt anlegen kann.

Beispiel: Wir wollen an die Funktion $f(x) = x^2$ eine Tangente im Punkt 2 anlegen.

$$f(x) = x^2 \text{ Stelle } x_t = 2 \quad (85)$$

$$t(x) = f'(x_t) \cdot (x - x_t) + f(x) \quad (86)$$

$$t(x) = 4 \cdot (x - 2) + 2^2 \quad (87)$$

$$t(x) = 4x - 8 + 4 \quad (88)$$

$$t(x) = 4x - 4 \quad (89)$$

5.10 spezielle Ableitungen (sin, cos, ln...)

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \quad (90)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad (91)$$

5.11 partielle Ableitungen

Bei partiellen Ableitungen wird nur die Variable abgeleitet, alle anderen werden wie konstanten behandelt -> Wegdifferenziert. Beispiel:

$$(2x + 3y) \frac{\partial}{\partial x} = 2 \quad (92)$$

$$(x \cdot y^2) \frac{\partial}{\partial y} = 2y \quad (93)$$

$$(94)$$

Beim Delta oben wird der Funktionsname angegeben, unten das Delta mit der Variable, nach der wir ableiten wollen.

5.12 Kurvendiskussion

Kurvendiskussion ist dafür da, um Extrema, Wendepunkte und andere Eigenschaften zu finden. Dafür sind in jedem Falle die ersten drei Ableitungen zu bilden.

5.12.1 Extrema

Um ein Extrema zu finden, muss die 1. Ableitung nach Null aufgelöst werden. Die gefundenen Stellen müssen in die 2. Ableitung eingesetzt werden. Wenn $f''(x_e) < 0$ dann ist das Extrema ein **Hochpunkt**. Wenn $f''(x_e) > 0$ dann ist das Extrema ein **Tiefpunkt**. Wenn $f''(x_e) = 0$ dann ist es ein Wendepunkt.

5.13 Praktische Anwendung der Differentialrechnung

Beispiel: Differentieller Widerstand

$$(3mAe^{\frac{0.5}{V}U} - \frac{0.5}{k\Omega}(U + 6V)) \frac{dI}{dU} \quad (95)$$

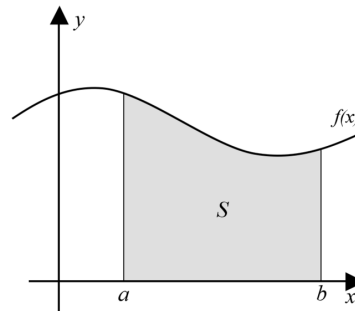
$$= 3mAe^{\frac{0.5}{V}U} \frac{0.5}{V} - \frac{0.5}{k\Omega} \frac{dI}{dU} \quad (96)$$

$$\frac{dI}{dU} = 3.577 \frac{1}{k\Omega} = 0.280k\Omega \quad (97)$$

6 Integralrechnung

Ein Integral ist ein Operator, um einen flächeninhalt einer Funktion in bestimmten Grenzen zu ermitteln. Beispiel:

Fläche von $S = x^2$ in dem Intervall a über b
 $= \int_a^b x^2 dx$



6.1 Die Stammfunktion

Eine Stammfunktion wird aus einer Funktion ermittelt. Diese Stammfunktion wieder abgeleitet ergibt die Ausgangsfkt. Das heißt, wir leiten eine Funktion auf, damit wir darüber auf den Flächeninhalt kommen.

$$\frac{df}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad (98)$$

$$\int 1 dx = x + C \quad (99)$$

$$\int 0 dx = C \quad (100)$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 \quad (101)$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ für } n \neq -1 \quad (102)$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad (103)$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad (104)$$

$$\int \frac{1}{x+2} dx = \ln(|x+2|) + C \quad (105)$$

$$\int (ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (106)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C \quad (107)$$

⇒ Konstante Glieder können vor dem Integral gezogen werden.

Hier beim unbestimmten Integral muss ein konstantes Glied dazu gezählt werden, beim bestimmten Integral fällt dies weg. Eine Stammfunktion ist aber nicht immer existent

Beispiele:

$$\int e^{-x^2} dx = ? \quad (108)$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = ? \quad (109)$$

6.2 Spezielle Stammfunktionen

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (110)$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (111)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C \quad (112)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad (113)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (114)$$

$$\int -\sin(x) dx = \cos(x) + C \quad (115)$$

$$\int -\cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (116)$$

$$\int \sin^2(w) dx = \int -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) + C \quad (117)$$

$$\int \cos^2(w) dx = \int \frac{1}{2}(1 + \sin 2\omega t) + C \quad (118)$$

$$\int \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + C \quad (119)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \quad (120)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln(|g(x)|) \quad (121)$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln(\cos(x)) \quad (122)$$

$$\int g(x) \cdot g'(x) dx = \frac{1}{2}[g(x)]^2 + C \quad (123)$$

6.3 Beispiele f. Stammfunktionen

$$\int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 + C \quad (124)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) dx \quad (125)$$

$$\int \overbrace{\frac{3x^2 + 3x}{x^3 + 1.5x^2}}^{g'(x)} dx = \ln(|x^3 + 3x^2|) + C \quad (126)$$

$$\int \overbrace{\frac{1}{2x+3}}^{g(x)} dx = \int (ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) = \frac{1}{2} \ln|2x+3| \quad (127)$$

$$(128)$$

6.4 bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral liefert als Ergebnis den Flächeninhalt in einem bestimmten Intervall.

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (129)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (130)$$

$$\int_a^b = \left| \int_a^{x_{01}} \right| + \left| \int_{x_{01}}^{x_{02}} \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b \right| \quad (131)$$

$$A = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = [1^3 - 0^3] = 1 \quad (132)$$

$$(133)$$

Die obrige Formel ist nötig, damit die negativen Flächen sich nicht gegen die positiven aufaddieren und zum Schluss Null ergeben, wie bei der Fkt. $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$. Hier muss das Integral über die Nullstellen zu Teilintegralen zerlegt werden und betragsweise aufsummiert werden.

$$\int x^3 \cdot \sqrt{x} = \int \underbrace{x^{\frac{7}{2}}}_{\text{nach } x^a \cdot x^b = x^{a+b}} \quad (134)$$

$$= \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} + C \quad (135)$$

$$(136)$$

$$\int_0^\pi \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos(2\frac{x}{2})) dx = \frac{1}{2}(t - \sin(x)) \quad (137)$$

$$(138)$$

Fläche über $\sin(2x)$, ACHTUNG: NULLSTELLEN!

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(2x) dx = (\text{Nullstellen: } 2x = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}) = \quad (139)$$

$$|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx| + |\int_{\pi/2}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(2x) dx| \quad (140)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} = 5/4 \quad (141)$$

Fläche über $x^2 - 2x + 3$ im Intervall $[-2,3]$ mit den Intervallen $x_0 = -1$ und $x_1 = 3$

$$A = |\int_{-2}^{x_0=-1} (x^2 - 2x - 3) dx| + \quad (142)$$

$$|\int_{x_0=-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx| \quad (143)$$

$$= |[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x]_{-2}^{-1}| + \quad (144)$$

$$|[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x]_{-1}^3| \quad (145)$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13FE \quad (146)$$

$$\int \sqrt{5x+2} dx = \frac{1}{5} \sqrt{5x+2} = \frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}} \quad (147)$$

$$\int \tan(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \quad (148)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx}_{\text{damit } \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ erf\u00fcllt}} = -\ln(-\cos(x)) + C \quad (149)$$

$$(150)$$

Folglich wird der Ausdruck unter der Wurzel beibehalten, nur die Wurzel an sich integriert und der Ausdruck wieder unter die Wurzel gezogen.

Fläche zwischen 2 Kurven:

$$f(x) = x^2 \quad (151)$$

$$g(x) = x^2 + x \quad (152)$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (153)$$

$$A = \int_a^b x^2 - (x^2 + x) dx = - \int_a^b x dx \quad (154)$$

$$(155)$$

Trig. Funktionen:

$$\int_0^{T \leftarrow 2\pi} \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} [\cos(\omega t)]_0^T \quad (156)$$

$$\int_0^{T \leftarrow 2\pi} \sin(3\omega t) dt = -\frac{1}{3\omega} [\cos(\omega t)]_0^T = -\frac{1}{3\omega} \underbrace{[\cos(3\omega) - \cos(0)]}_{1 \quad 1} = 0 \quad (157)$$

$$\int_T^{k \cdot T} \sin(x) dx = 0 \leftrightarrow k \text{ element d. nat. Zahlen} \quad (158)$$

$$(159)$$

Beispiel: Leistung im Wechselstromkreis:

$$P = u(t) \cdot i(t) \quad (160)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u} \cdot \sin(\omega t)) \cdot \hat{i}(\sin(\omega t + \varphi)) dt \quad (161)$$

$$P = \frac{\hat{u}\hat{i}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cdot \underbrace{(\sin\omega t \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi))}_{i(t) \text{ nach Additionstheorem}} dt \quad (162)$$

$$P = \frac{\hat{u}\hat{i}}{T} \cdot \cos(\varphi) dt + \underbrace{\int_0^T \sin(\omega t) dt}_{=0} + \sin(\varphi) \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t) dt}_{=0} \quad (163)$$

$$P = \frac{\hat{u}\hat{i} \cdot \cos(\varphi)}{T} \quad (164)$$

Merke: Bei Schwingungen kann das Integral simpel gelöst werden, wenn ω ein ganzzahliges vielfaches von 1 ist. Falls die beiden Kurven sich schneiden, muss man diese Fkt. wie oben in Teilintegrale zerlegen, damit man immernoch eine Fläche rausbekommt.

Berechnung $q(t)$ mit $q(0) = 0$. $i = \frac{dq}{dt}$

$$q(t) = \int 2mAe^{-\frac{t}{5ms}} dt \quad (165)$$

$$= 2mA \int e^{-\frac{t}{5ms}} dt = -10 \underbrace{ms \cdot mA}_{\mu As} \cdot e^{-\frac{t}{5ms}} \quad (166)$$

da $q(0) = 0$ kann man C bestimmen (167)

$$q(0) = 10\mu As \cdot e^0 + C \quad (168)$$

$$\text{damit } C = 10\mu As \quad (169)$$

$$q(t) = 10\mu As(1 - e^{-\frac{t}{5ms}}) \quad (170)$$

6.5 Uneigentliche Integrale

Problem: Spannung gegenüber unendlich fernem Punkt berechnen. Beispiel:

$$\int_1^{\infty} \frac{K}{r^2} dr = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{K}{r^2} dr = K \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_1^{x \rightarrow \infty} = K \cdot \left[0 - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = K \quad (171)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \underbrace{[\ln(|x|)]_1^{\infty}}_{\text{nichtdefiniert}} \quad (172)$$

6.6 Integration durch Substitution

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx \Rightarrow t = \sqrt{x^2 + 1} \quad (173)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dt \quad (174)$$

$$\int x \cdot t \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dt \quad (175)$$

$$= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C \quad (176)$$

$$(177)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+5}} dx \Rightarrow t = x + 5, \frac{dt}{dx} = dx \quad (178)$$

nicht integrierbar, da noch x vorh.

$$= \int \frac{x}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{t-5}{\sqrt{t}} dt \quad (179)$$

$$= \int (t-5) \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{ruckSubs.}}{=} \quad (180)$$

$$\frac{2}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} - 10(x+5)^{\frac{1}{2}} + C \quad (181)$$

Merke : Nie was integrieren, wo noch ein x drin ist!

Immer das Substituieren, was am hässlichsten aussieht!

Wenn nach der Substitution noch 'alte' Integrationsvariablen hat, dann muss man einfach die Variablen nach der Substitution (**Grundform**, nicht differential) umstellen.

6.7 Partielle Integration

Problem: $\int x \cdot e^x dx = ?$. Dieses kann man nur mit partieller Integration lösen. Die allg. Lösungsformel dafür lautet:

$$\int u(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) dx \cdot v'(x) \quad (182)$$

Beispiele:

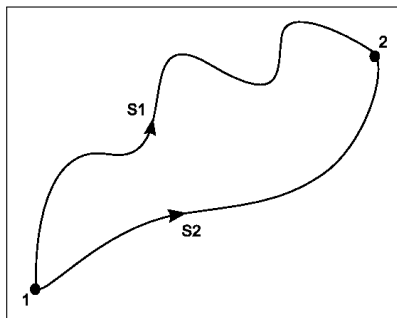
$$\underbrace{\int x \cdot e^x dx}_{u=x; v=e^x} = x \cdot e^x - \frac{x^2}{2} \cdot e^x \quad (183)$$

Das war ein Schuss in den Ofen! Nun vertauschen wir $u(x)$ und $v(x)$. Dann ist $u = e^x$ und $v = x$, daraus folgt $v' = 2$. Auf ein neues!

$$\underbrace{\int x \cdot e^x dx}_{u=e^x; v=x} = x \cdot e^x - e^x = \underline{\underline{e^x(x-1) + C}} \quad (184)$$

Partielle Integration hat was mit erfahrung und ausprobieren zu tun, wie es so oft bei Integralen ist und immer sein wird bzw. wir schon bei der Substitution gesehen haben.

6.8 Wegintegrale



Als Wegintegral bezeichnet man die Länge eines Weges. Dazu kann man auch die Integralrechnung verwenden. Sei S_2 eine stetig differenzierbare Funktion und sei von 1.5 bis 2 durch die Funktion s^2 definiert. Dann ist das Wegintegral $\int_{S_2} f(s) ds$ als $\int_1^3 f(t) dt$ definiert.

Wegintegrale löst man allgemein wie folgt:

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (185)$$

Hierbei sei C eine parametrisierte Kurve, in unserem Beispiel x^2 von 1.5 bis 2. Die Lösung dieses Integrals lautet:

$$\int_C ds = \int_{1.5}^2 \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \approx 1.820463902 \quad (186)$$

$$(187)$$

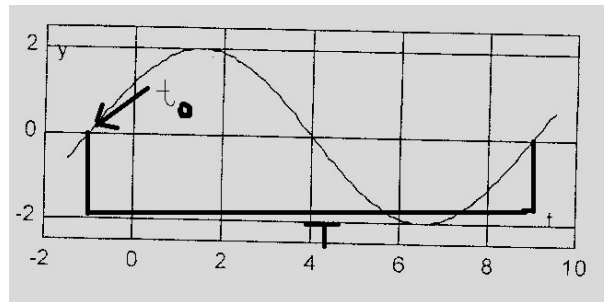
7 Additionstheoreme / Trig. Zusammenhänge

Formel zur Addition von Winkeln:

$$\sin(\varphi \pm \beta) = \sin\varphi \cdot \cos\beta \pm \cos\varphi \cdot \sin\beta \quad (188)$$

$$\sin(\varphi \pm \beta) = \cos\varphi \cdot \cos\beta \mp \sin\varphi \cdot \sin\beta \quad (189)$$

8 Schwingungen



Grundform: $A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

gegeben: $y(t) = 2\sin(2s^{-1}t - 4)$. Vor dem Sinus steht die Amplitude, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi s$. Die Phasenverschiebung kann man aus $\varphi = -t_0 \cdot \omega$ errechnen. t_0 ist der Beginn der Periode.

Beispiel oben: $A = 2$, trivial. Schwingdauer $T = 10s$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{5} s^{-1}$.

$\sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = -\omega \cdot t_0$. Damit ist $\varphi = -\frac{\pi}{5}(-1) = \frac{\pi}{5}$.

9 Vektorrechnung

Vektor $\hat{=}$ Pfeil

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Länge des Pfeils: $|\vec{v}|$
- Richtung des Pfeils: \vec{v}

Abstand zwischen Punkt A und B

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad (190)$$

9.1 Addition und Subtraktion

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad (191)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad (192)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad (193)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \quad (194)$$

9.2 Linearkombination, Faktormultiplikation

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c} + \nu \cdot \vec{d}$$

Die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ sind eine Linearkombination von \vec{a} .

Ist die Summe der Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ gleich 0, dann sind diese Linearabhängig.

Faktormultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad (195)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad (196)$$

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind *kollinear*.

9.3 Darstellung von Vektoren

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind Vektoren der Länge 1.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Dann gilt}$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\pm)|\vec{a}_x|}_{a_x} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{(\pm)|\vec{a}_y|}_{a_y} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{(\pm)|\vec{a}_z|}_{a_z} \cdot \vec{e}_z \quad (197)$$

Vektor aus zwei Punkten

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (198)$$

9.4 Länge

Länge:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (199)$$

Vektor mit der Länge 1, in dieselbe Richtung wie \vec{a} :

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (200)$$

Analog: Der Länge λ

$$\lambda \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{201}$$

9.5 Winkel

x-Achse	$\cos \alpha = \frac{a_x}{ \vec{a} }$
y-Achse	$\cos \beta = \frac{a_y}{ \vec{a} }$
z-Achse	$\cos \gamma = \frac{a_z}{ \vec{a} }$

Tabelle 1: Winkel zur Koordinatenachse

Abhängigkeit:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \tag{202}$$

$$\frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1 \tag{203}$$

9.6 Geraden

Geraden sind festgelegt durch einen beliebigen Punkt und der Richtung.

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{u} \tag{204}$$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{r}(\lambda) = \lambda \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{205}$$

Parrallel	Richtungsvektoren sind kollinear
identisch	Richtungsvektoren sind kollinear & Stützpunkt liegt auf der anderen Gerade
Schnittpunkt	Gleichsetzen der Geraden & kein Widerspruch der Faktoren vorhanden → einsetzen eines Faktors in Gerade = Schnittpunkt
Windschief	Parrallelbedingung und Schnittpunktsbedingung treffen nicht zu

Tabelle 2: Lagebeziehungen von Geraden

9.7 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \tag{206}$$

φ ist der eingeschlossene Winkel der Vektoren ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$)

Regeln

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{aber: } (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Darstellung

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (207)$$

Winkel

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos \varphi \quad (208)$$

Senkrechte Projektion von \vec{b} auf \vec{a}

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad (209)$$

9.8 Vektorprodukt/Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_z b_x - a_x b_z) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (210)$$

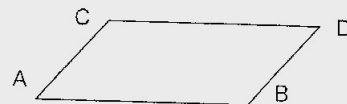
Bestimmt einen Vektor der Senkrecht zu einer Ebene steht (Kreuzprodukt aus den Ebenenaufspannenden Vektoren).

9.9 Beispiele

19) Vom Parallelogramm ABCD seien die Eckpunkte

$A = (0 | 0 | 1)$, $B = (4 | 0 | 1)$ und $C = (\sqrt{2} | 1 | 2)$ gegeben.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.
- Berechnen Sie den Winkel bei A.
- Geben Sie einen Vektor an, der senkrecht auf der Ebene steht, in der das Parallelogramm liegt.
- Liegt der Punkt $E = (5 | 0 | 1)$ auf der Seite \overline{AB} ?



Lösung:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad (211)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (212)$$

$$\vec{OD} = \vec{AD} + \vec{OA} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (213)$$

$$(214)$$

Teil B:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overbrace{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}^{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}}{\underbrace{|\vec{AB}|}_{\sqrt{(a_x b_x)^2 + (a_y b_y)^2 + (a_z b_z)^2}} \cdot |\vec{AC}|} = 45^\circ \quad (215)$$

Senkrechte Projektion:

$$\frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AC}|^2} \vec{AC} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (216)$$

$$(217)$$

Probe:

$$\vec{n} \times \vec{AC} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kreuzprodukt}} = 0 \quad (218)$$

Liegt E = (5|0|1) auf der Strecke AB?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?? \quad (219)$$

Da für $\lambda = \frac{5}{4}$ das LGS erfüllt ist, liegt der Punkt auf der Geraden, aber nicht auf der Strecke \vec{AB} . λ müsste zwischen Null und Eins sein!

Beispiel 2 :

$$F1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, F2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (220)$$

$$\frac{1}{|F1|} \cdot F1 = \frac{1}{\sqrt{9 - 25 - (-25)}} F1 = 2 \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (221)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{damit Betrag}=1} \quad \text{damit } F1 \perp F2 \quad (222)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \quad (223)$$

10 Kreise

Kreise haben die Grundform $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R$. Aus x_0 und y_0 lassen sich die Mittelpunkte ablesen. Aus $x^2 + (y-1)^2 = 16$ folgt: $M = (0|1)$, $R = \sqrt{16}$. Die Parameterdarstellung lautet:

$$x - x_0 = R \cdot \cos(t) \quad (224)$$

$$y - y_0 = R \cdot \sin(t) \quad (225)$$

$$(226)$$

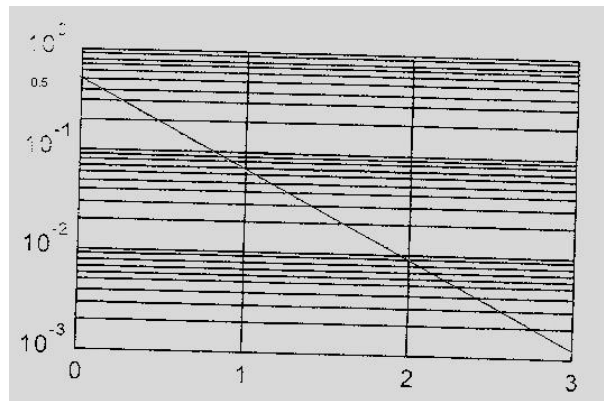
Wobei nach y bzw. x aufgelöst werden muss. Wenn dies nicht funktioniert, muss man

11 Quadratische Ergänzung

$4x^2 + 11x - 3 = 0$	Division durch 4
$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$	Normalform
$x^2 + \frac{11}{4}x = \frac{3}{4}$	"Sortieren"
$x^2 + 2x \cdot \frac{11}{8} + \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{11}{8}\right)^2$	quadratische Ergänzung
$\left(x + \frac{11}{8}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{121}{64} = \frac{169}{64}$	
$\left x + \frac{11}{8}\right = \frac{13}{8}$	Betragsstriche!

12 Ablesen von log. Skala

Grundform e -Funktion: $a \cdot e^{bt}$



- $y(0) = a$, erster Strich in der log. Darstellung ist a , damit ist $a = 0.5$.
- $b = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{t_2 - t_1}$
- $b = \frac{\ln(0.009) - \ln(0.5)}{2 - 0} = -2.01$
- Die \ln 's ergeben sich aus der Ablesung, man muss immer die Potenz nehmen, welche **unter** dem abgelesenen Wert liegt.
- Wie Steigungsdreieck bei Geraden.