Projektaufgabe Mathe II / Passiver Tiefpassfilter

Abdurrahman Namdar / Martin Henning / Torben Zech

3. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

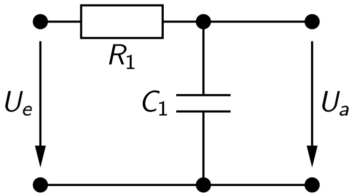


Abbildung: RC-Tiefpaß

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{1}$$

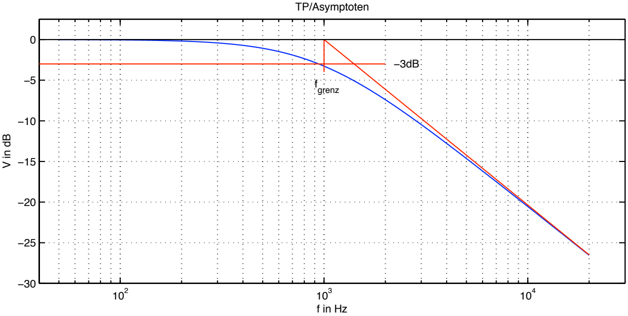
$$\underline{V} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{2}$$

$$\underline{V} = \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{R \cdot C}_{\tau}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + j\omega\tau}}} \tag{3}$$

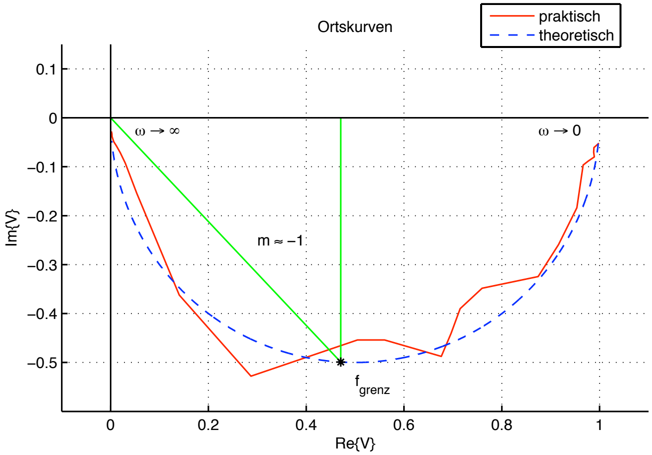
Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses

$$
\begin{aligned}
f_{grenz} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau} && (4) \\
\frac{\hat{u}_{aus}}{\hat{u}_{ein}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} && (5) \\
&= \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R} && (6) \\
\sqrt{2} &= 1 + 1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R && (7) \\
f &= \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R} \right| && (8) \\
&= \underline{\underline{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R} \right)^2}}} && (9)
\end{aligned}
$$

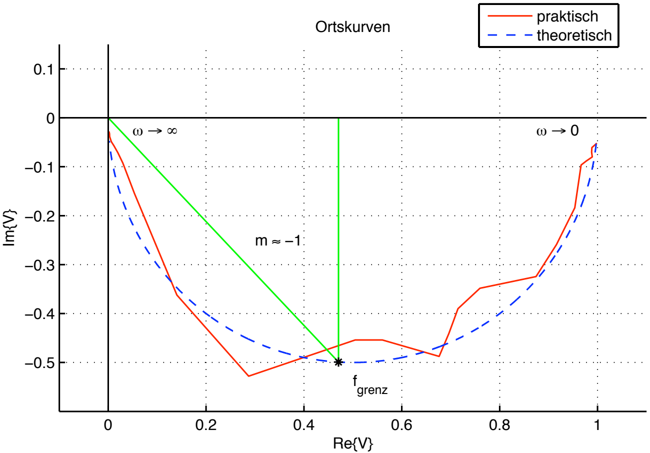
Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses



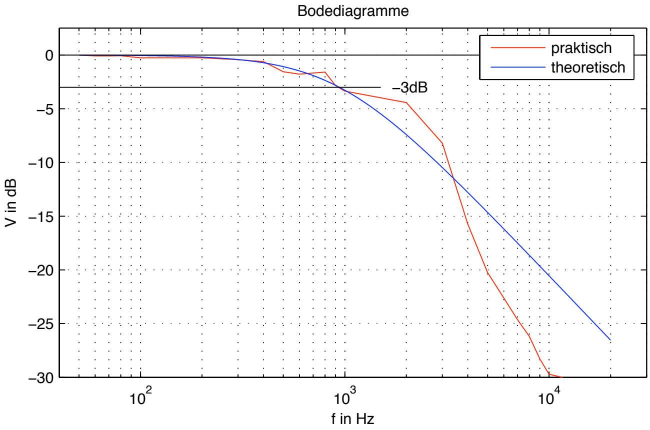
Ortskurve des RC-TP



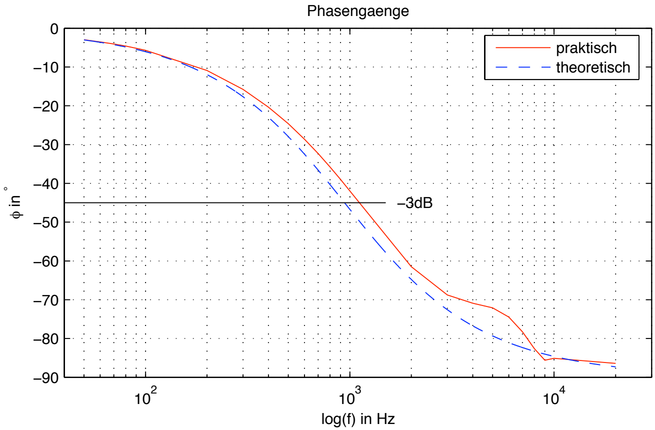
Ortskurve des RC-TP



Frequenzgang



Phasengang


Phasengaenge
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
−90
φ in °
praktisch
theoretisch
−3dB
10^2
10^3
10^4
log(f) in Hz

konventionelle Berechnung

$$Q = C \cdot U \tag{10}$$
$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \tag{11}$$
$$U_R = i(t) \cdot R \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

Unter Zuhilfenahme des Kirchhoff'schen Maschensatzes:

$$U_0 = U_R + U_C \tag{14}$$
$$= \underbrace{R \cdot C}_{\tau} \frac{du}{dt} + U_C \tag{15}$$
$$\frac{U_0}{\tau} = \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} \tag{16}$$

konventionelle Berechnung

Als Ansatz für U_c nimmt man ein Polynom 1. Grades:

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{\tau} &= A + \frac{1}{\tau}(At + B) && (17)\\
&= \frac{1}{\tau}A + At\frac{1}{\tau} + B\frac{1}{\tau} && (18)\\
0 &= A \cdot t \cdot \frac{1}{\tau} \rightarrow \underline{\underline{A = 0}} && (19)\\
\frac{1}{\tau}U_0 &= A + B\frac{1}{\tau} \rightarrow \underline{\underline{B = U_0}} && (20)\\
\text{Allgemeine Lösung: } U_c &= \underbrace{Ke^{-\frac{1}{\tau}t}}_{y_H} + \underbrace{U_0}_{y_P} && (21)
\end{aligned}$$

konventionelle Berechnung

Mit der allg. Lsg. berechnen wir das Anfangswertproblem: Die Ladung zum $t_0 = 0$.

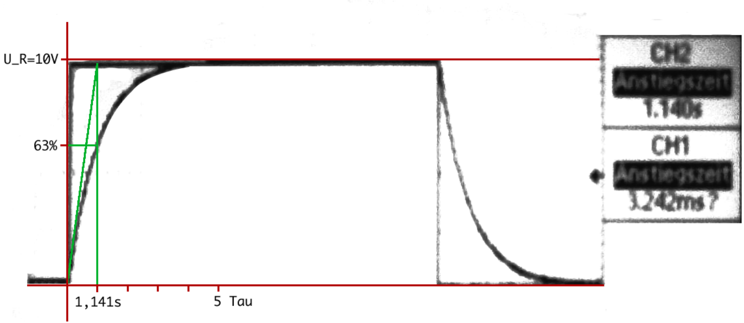
$$
\begin{aligned}
U_C(0) &= 0 && (22)\\
U_{C_{AWP}}(0) &= K \underbrace{e^{-\frac{1}{\tau}\cdot 0}}_{=1} + U_0 && (23)\\
U_{C_{AWP}}(0) &= K + U_0 && (24)\\
U_{C_{AWP}}(0) &= -U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} + U_0 && (25)\\
U_{C_{AWP}}(0) &= \underline{\underline{U_0(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})}} && (26)
\end{aligned}
$$

Berechnung Laplace Transformation

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{\tau} &= \frac{du_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} && (27)\\
\frac{U_0}{\tau}\frac{1}{s} &= s \cdot U_C(s) - 0 + \frac{1}{\tau}U_C(s) && (28)\\
\frac{U_0}{\tau}\frac{1}{s} &= U_C(s)(s + 1\frac{1}{\tau}) && (29)\\
U_C(s) &= \frac{U_0}{s \cdot \tau(s + \frac{1}{\tau})} = \frac{U_0}{\tau}\left(\frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})}\right) && (30)\\
U_C(t) &= \frac{U_0}{\cancel{\tau}} \cdot \cancel{\tau}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) && (31)\\
&= \underline{\underline{U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}} && (32)
\end{aligned}$$

Deutung der Lösung der DGL

Die Lösung der DGL ist die Sprungantwort



Deutung der Lösung der DGL

- 1 $\tau \approx 63$ % der Maximalladung erreicht
- Nach 5 $\tau \approx 99.3$ % der Maximalladung erreicht

Fragen / Schlusswort

Danke für Ihre Aufmerksamkeit - für weitere Fragen stehen wir Ihnen gerne noch zur Verfügung.