

Fourierreihen und Spektrenanalyse

Protokoll 11

Messtechnik II für KEB, TFH Berlin, Gruppe D
17. Januar 2007

Torben Zech	738845
Martin Henning	736150
Abdurrahman Namdar	739068

Inhaltsverzeichnis

1	Grundgedanke der Fourierreihe	3
2	Dreieck	4
3	Rechteck	5
4	Spektrenanalyse	6
5	Bedingungen für den Erfolg der FFT	6
6	Messwerte ohne RC-Tiefpass	6
7	Filterung der Signale durch einen RC-TP mit $f_g = 1kHz$	8
A	MatLab-Quellcode	11
A.1	messungen.m	11
A.2	messberechnungen.m	12

1 Grundgedanke der Fourierreihe

Jede periodische Funktion kann als unendliche Summe von harmonischen Schwingungen dargestellt werden.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot 2\pi f_0 t + b_n \cdot \sin(n \cdot 2\pi f_0 t))) \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(n \cdot 2\pi f_0 t) dt \text{ fuer } n \neq 0 \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(n \cdot 2\pi f_0 t) dt \text{ fuer } n \neq 0 \quad (3)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \text{ fuer } n = 0 \quad (4)$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin(n \cdot 2\pi f_0 t + \Phi_n) \quad (5)$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (6)$$

$$\Phi_n = \operatorname{atan}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad (7)$$

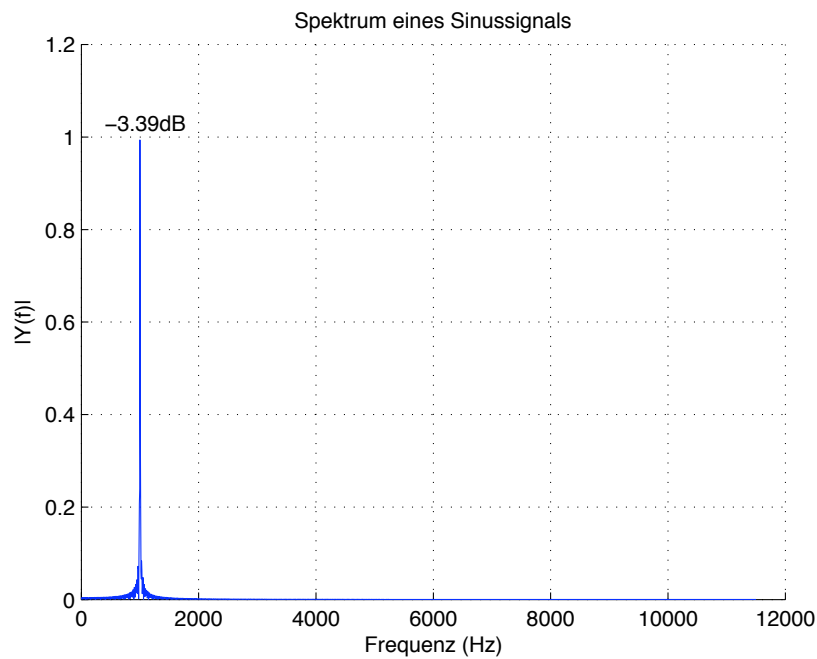


Abbildung 1: Sinussignal berechneter Verlauf

2 Dreieck

$$u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega t) - \dots \right) \quad (8)$$

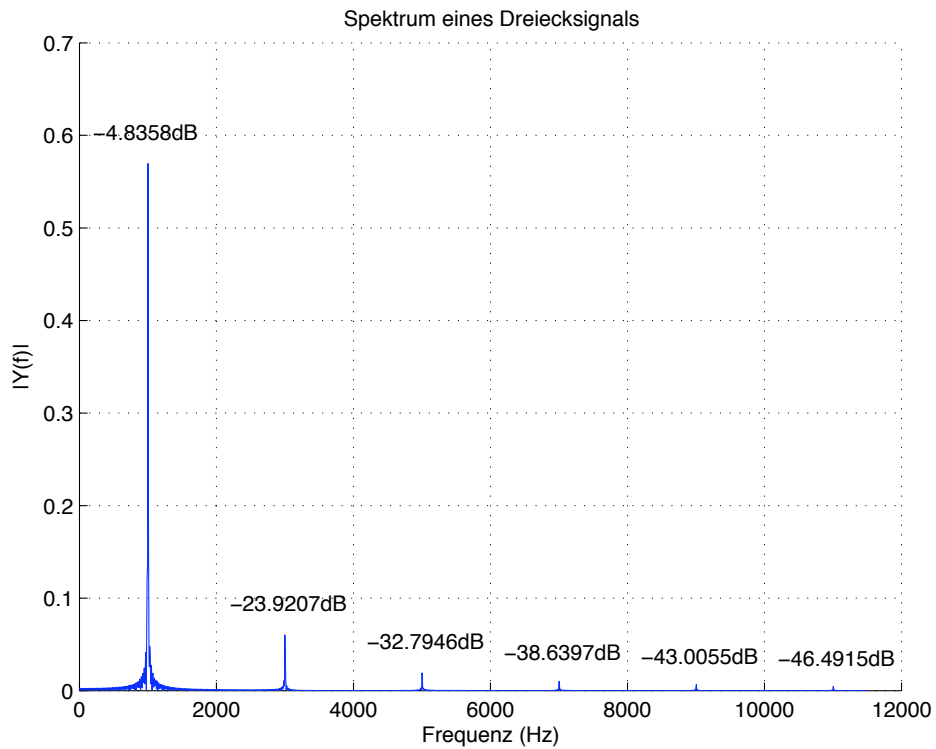


Abbildung 2: Dreiecksignal berechneter Verlauf

3 Rechteck

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dots \right) \quad (9)$$

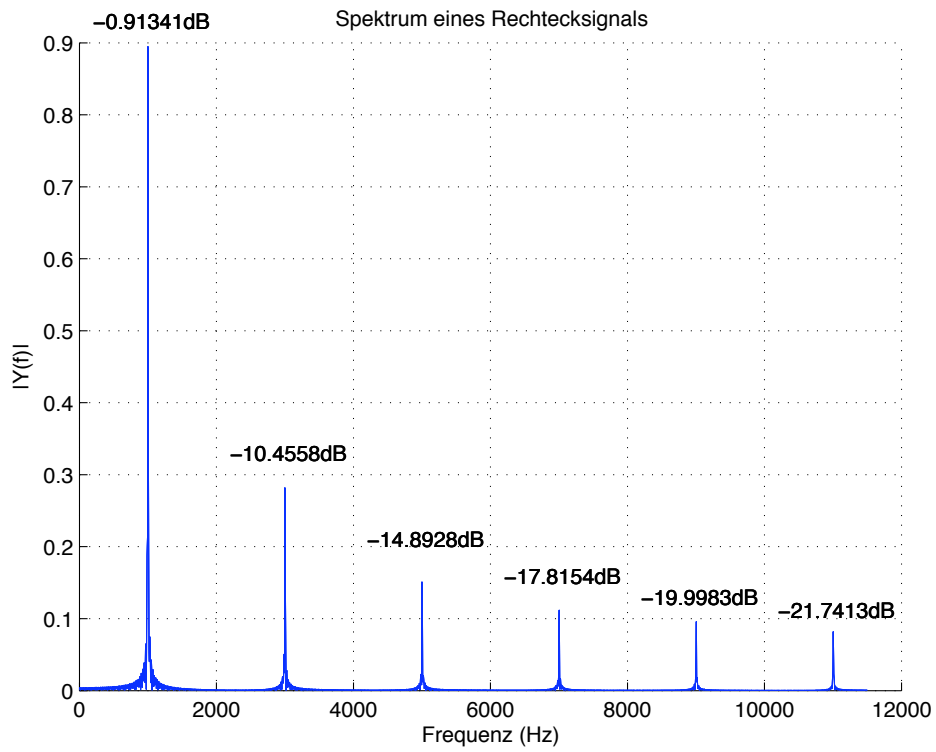


Abbildung 3: Rechtecksignal berechneter Verlauf

4 Spektrenanalyse

Zum Analysieren der Funktion transformieren wir das Signal per FFT und erhalten sein Spektrum. Wir benutzen FFT, da die normale Fouriertransformation als Grenzen $-\infty$ bzw. $+\infty$ besitzt. Da dies technisch nicht realisierbar ist, benutzen wir die FFT, bei der nur ein Teil transformiert wird.

5 Bedingungen für den Erfolg der FFT

- Signal muss periodisch sein
- Signal muss bandbegrenzt sein
- Einhaltung des Abtasttheorems
- Datenfenster muss eine ganze Anzahl von Perioden anzeigen.

Bei Nichteinhalten tritt der Leck-Effekt auf, wobei im Bildbereich *Viertellinien* auftauchen. Um dies zu korrigieren benutzen wir das Flattop Fenster. Der Vorteil dieses Fensters im Vergleich zu anderen ist die höchste Amplitudengenauigkeit.

6 Messwerte ohne RC-Tiefpass

Wir haben die Signale gemessen und per FFT-Funktion auf unserem Oszilloskop im Spektralbereich anzeigen lassen. Hier sehen wir, dass die Anteile der Spannungen an der Fourier Reihe mit zunehmender Frequenz immer geringer werden, was wir oben in der Formel sehen. Obwohl wir kein Tiefpass haben, werden die Werte in Dezibel angegeben, da das Oszilloskop nach der Formel $20\lg(\frac{U_{eff}}{U_{ref}})$ rechnet.

Sinus		Dreieck		Rechteck	
V_s [dB]	f[kHz]	V_d [dB]	f[kHz]	V_r [dB]	f[kHz]
-3.39	1	-4.67	1	-0.99	1
		-23.8	3	-11.0	3
		-32.2	5	-15.8	5
		-37.8	7	-18.6	7
		-42.6	9	-20.2	9
		-47.8	11	-22.2	11

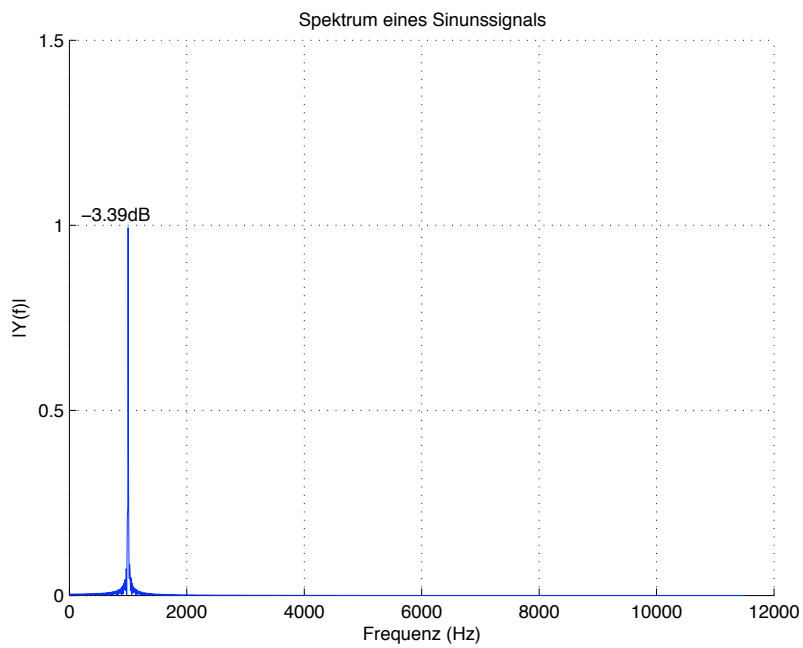


Abbildung 4: Sinussignal gemessener Verlauf

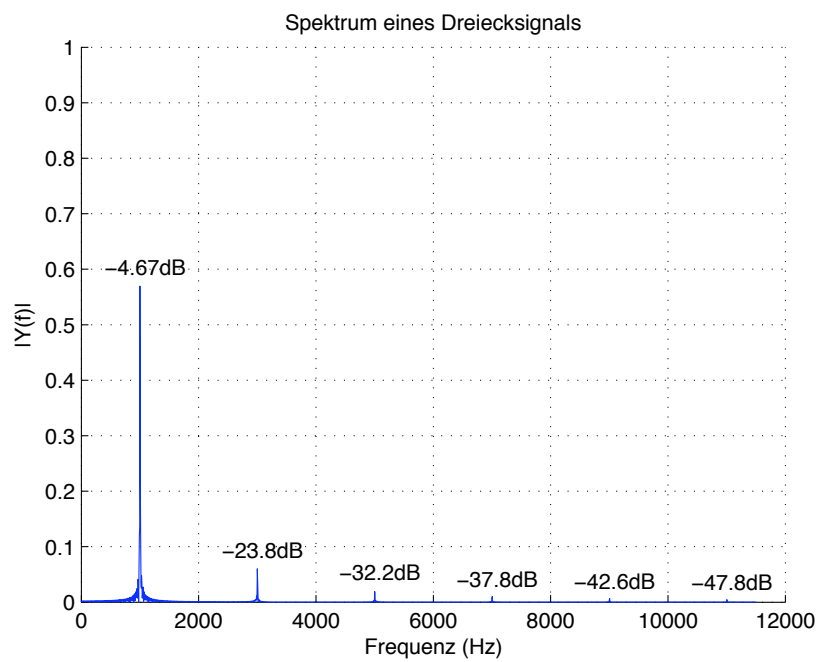


Abbildung 5: Dreiecksignal gemessener Verlauf

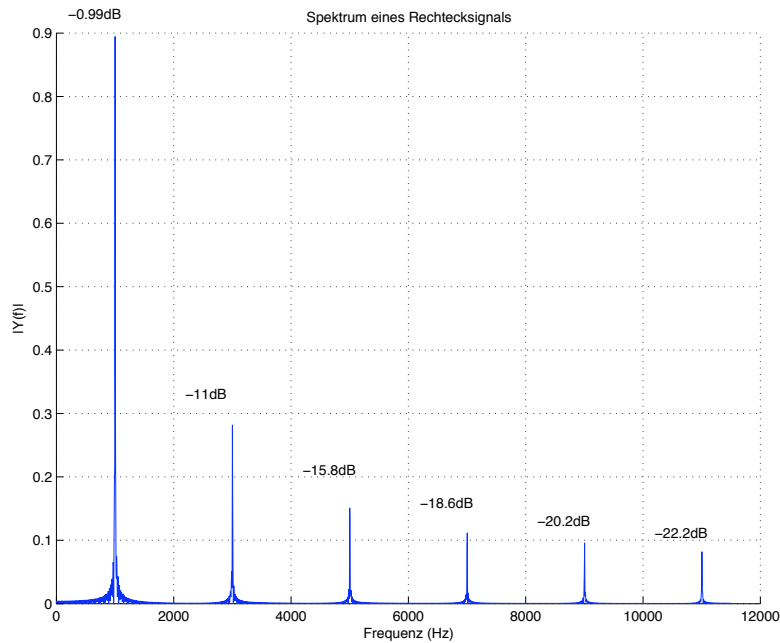


Abbildung 6: Rechtecksignal gemessener Verlauf

Wie erwartet sieht man kaum ein Unterschied zwischen den Abb.(1-3) und den Abb.(4-6). Die kleinen Unterschieden sind auf ungenaue Messinstrumente, wie Toleranzen der entsprechenden Bauteile zurückzuführen.

7 Filterung der Signale durch einen RC-TP mit $f_g = 1kHz$

Nach der Aufnahme der Signale werden die Signale durch einen RC-Tiefpass gefiltert mit $f_G = 1kHz$. Als Widerstand R haben wir $10k\Omega$ verwendet, den Kondensator C wurde mit $16nF$ gewählt. Beim Vergleichen der Messwerte sehen wir, dass der Tiefpass die Frequenzen mit zunehmender Frequenz immer stärker dämpft, was unserer Erwartung entspricht

Sinus		Dreieck		Rechteck	
V_s [dB]	f[kHz]	V_d [dB]	f[kHz]	V_r [dB]	f[kHz]
-6.19	1	-6.99	1	-3.79	1
		-33.4	3	-20.6	3
		-47.0	5	-29.0	5
		-53.1	7	-35.4	7
				-39.0	9
				-43.0	11

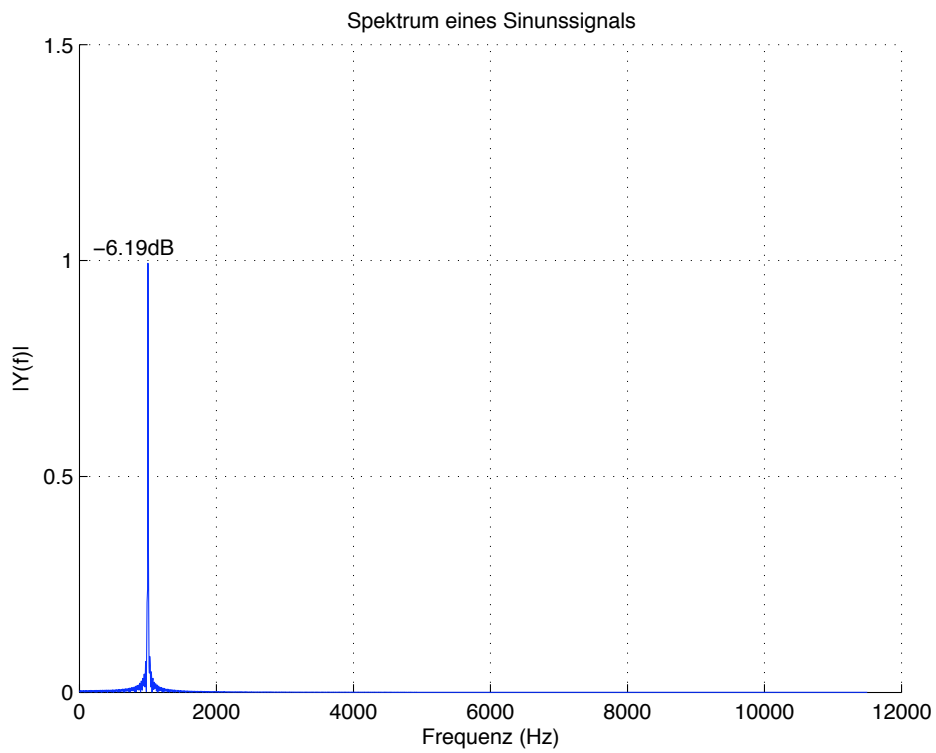


Abbildung 7: Sinussignal gemessener Verlauf mit T.P.

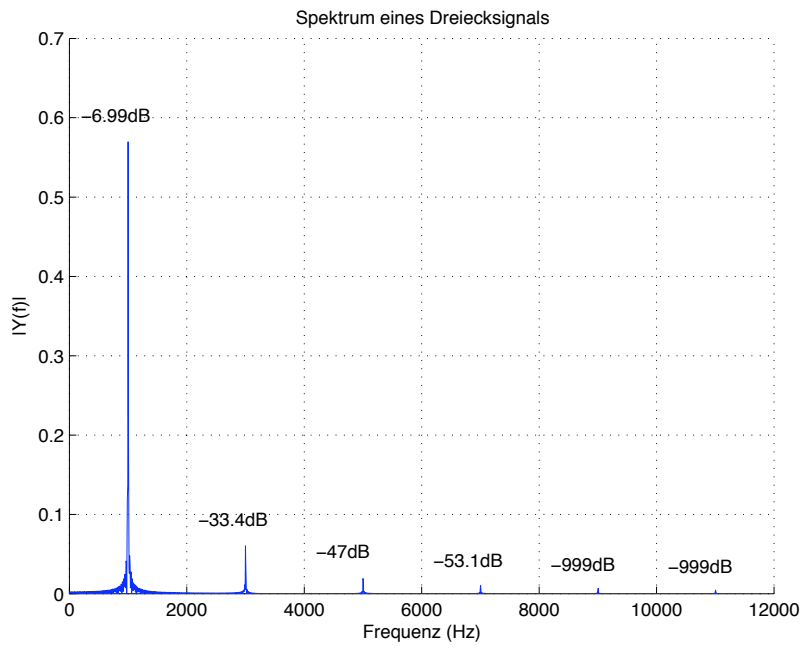


Abbildung 8: Dreiecksignal gemessener Verlauf mit T.P.

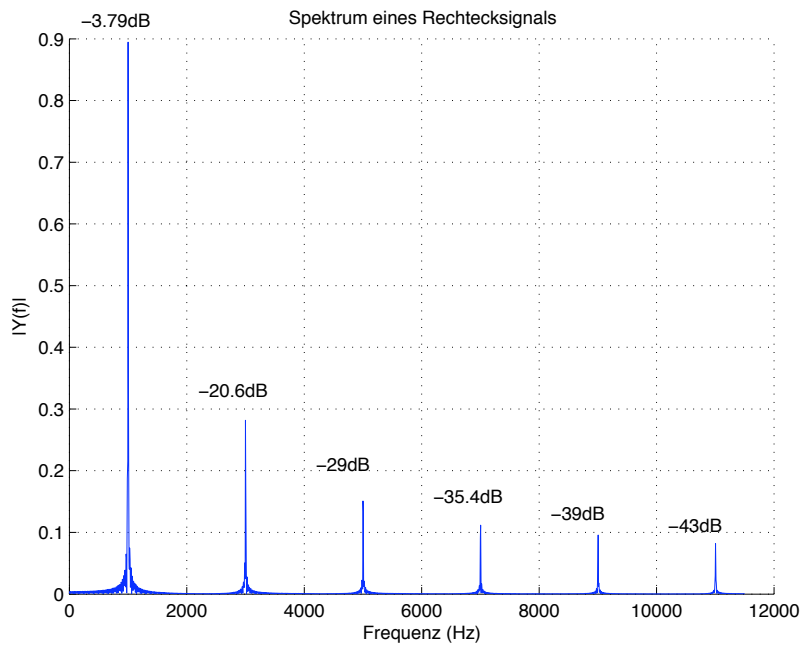


Abbildung 9: Rechtecksignal gemessener Verlauf mit T.P.

A MatLab-Quellcode

Im Folgenden finden sie den Matlabcode, welchen wir zur Auswertung der Messwerte und zum Plotten der entsprechenden Spektren geschrieben/verwendet haben. (Achtung, sehr experimentell!)

A.1 messungen.m

```
1 %ohne T.P.
2 %Sinus
3
4 VS=[-3.39];
5 fs=[1000];
6
7 %Dreieck
8
9 VD=[-4.67 -23.8 -32.2 -37.8 -42.6 -47.8];
10 fd=[1000 3000 5000 7000 9000 11000];
11
12 %Rechteck
13
14 VR=[-0.99 -11.0 -15.8 -18.6 -20.2 -22.2];
15 fr=[1000 3000 5000 7000 9000 11000];
16
17 %mit T.P.
18 %Sinus
19
20 VS1=[-6.19];
21
22 %Dreieck
23
24 VD1=[-6.99 -33.4 -47.0 -53.1];
25 fd1=[1000 3000 5000 7000];
26
27 %Rechteck
28 VR1=[-3.79 -20.6 -29.0 -35.4 -39.0 -43.0];
```

A.2 messberechnungen.m

```
1 messung;
2
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 % es kann jeweils nur ein spektrum geplottet      %
5 % werden, d.h. entweder berechnet ODER gemessen %
6 % EINER signalform, ALLES andere MUSS aus-      %
7 % kommentiert werden!                          %
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 %===== VARIABLEN =====
11
12 Fs = 23000;                                     % samplingfrequenz
13 T = 1/Fs;                                       % zeit
14 L = 3000;                                       % laenge signal
15 t = (0:L-1)*T;                                  % vektor mit zeiten
16 w = 1000*2*pi;                                  %kreisfrequenz
17 U_dach = 0.707                                  %U_dach -3dB
18 n=[1:2:11]
19
20
21 %===== SINUS =====
22
23 %sinus
24 %y = sin(w*t);
25 %spannung = Usin;
26 %spannung = Usin1;
27
28
29 %===== RECHTECK =====
30
31 %y = 4*U_dach/pi * (sin(w*t)+1/3*sin(3*w*t)+1/5*sin(5*w*t)
32 %      +1/7*sin(7*w*t)+1/9*sin(9*w*t)+1/11*sin(11*w*t));
33 %q = 1;
34 %y=0;
35 %for i = 1:2:11
36 %      spannung(q) = Urecht1(q)/i
37 %      y = y + spannung(q)*sin(i*w*t);
38 %      q = q+1;
39 %end
40
41 %spannung = 4/pi * U_dach./n
42 %spannung = 4/pi * Urecht./n;
43
44
45
46
47
```

```

48 %===== DREIECK =====
49
50 y = 8*U_dach/pi^2 * (sin(w*t)-1/3^2*sin(3*w*t)+
51     1/5^2*sin(5*w*t)-1/7^2*sin(7*w*t)+1/9^2*sin(9*w*t)
52     -1/11^2*sin(11*w*t));
53 %y = 8/pi^2 * (Udrei1(1)*sin(w*t)-Udrei1(2)*1/3^2*sin(3*w*t)
54 %     +Udrei1(3)*1/5^2*sin(5*w*t)-Udrei1(4)*1/7^2*sin(7*w*t)
55 %     +Udrei1(5)*1/9^2*sin(9*w*t)-Udrei1(6)*1/11^2*sin(11*w*t));
56
57 spannung = 8/pi^2 * Udrei./(n.^2);
58 %spannung = 8/pi^2 * Udrei1./(n.^2);
59
60
61 %===== FFT + PLOT =====
62
63 % nächsthöhere zweierpotenz der länge von y ausrechnen
64 NFFT = 2^nextpow2(L);
65
66 % fft transform
67 Y = fft(y,NFFT)/L;
68 f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2);
69
70 % spektrum einseitig plotten
71 hold on;
72 plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2)));
73
74 q = 1;
75 for i = 1:2:11
76     dB = 20*log10(spannung(q));
77     text((i*1000)-800,spannung(q)+0.03,[num2str(dB) 'dB']);
78     q = q+1;
79 end
80
81 title('Einseitiges Spektrum von y(t)')
82 xlabel('Frequenz (Hz)')
83 ylabel('|Y(f)|')
84 grid on

```