

Projektaufgabe Mathematik II

Der passive RC-Tiefpaß

Messtechnik II / Mathematik II für KEB, TFH Berlin, Gruppe D
22. Dezember 2006

Torben Zech	738845
Martin Henning	736150
Abdurrahman Namdar	739068

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Vorbetrachtungen	3
1.1	Passiver Tiefpaß 1. Ordnung	3
1.2	Die komplexen Übertragungsfunktion	3
1.3	Darstellung in Betrag / Phase	3
1.4	Zu Darstellungszwecken benutzen wir dB	3
1.5	Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses	4
2	Durchführung	5
2.1	Grenzfrequenz	5
2.2	Messung	5
2.3	Grafische Darstellung der Ergebnisse	5
3	Sprungantwort eines Kondensators	7
3.1	Herleitung/Lösung der Differentialgleichung - konventionell	7
3.2	Herleitung/Lösung der Differentialgleichung - Laplace	8
3.3	Grafische Überprüfung der Sprungantwort	8
A	Matlab-Quellen	9
A.1	Achse.m	9
A.2	messung.m	9
A.3	phase.m	10
A.4	bode.m	11
A.5	ortskurve.m	12
A.6	bodeasym.m	13
A.7	rc.m4 (Erzeugung von [Abb. ??])	14

1 Theoretische Vorbetrachtungen

1.1 Passiver Tiefpaß 1. Ordnung

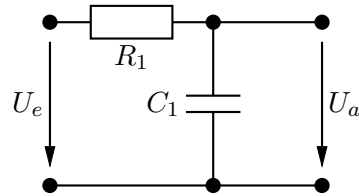


Abbildung 1: RC-Tiefpaß Meßschaltung

1.2 Die komplexen Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion stellt das frequenzabhängige Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung dar. Allgemein kann sie für einen passiven Tiefpaß 1. Ordnung [Abb. ??] wie folgt berechnet werden:

$$\underline{V} = \frac{U_A}{U_E} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (1)$$

$$\underline{V} = \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{R \cdot C}_{\tau}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (2)$$

1.3 Darstellung in Betrag / Phase

$$|V| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega C)^2}} \quad (3)$$

$$\varphi = \varphi_z - \varphi_n \quad (4)$$

$$= 0 - \arctan(\omega\tau) \quad (5)$$

1.4 Zu Darstellungszwecken benutzen wir dB

$$\Rightarrow \log(f) \quad (6)$$

$$V_{dB} = 20 \cdot \log(V) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\right) \quad (7)$$

1.5 Grenzfrequenz eines RC-Tiefpasses

$$f_{grenz} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau} \quad (8)$$

$$\frac{\hat{u}_{aus}}{\hat{u}_{ein}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R} \quad (10)$$

$$\sqrt{2} = 1 + 1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R \quad (11)$$

$$f = \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R} \right| \quad (12)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R} \right)^2} \quad (13)$$

3dB - Definition der Grenzfrequenz Verlängert man die Asymptoten der beiden Äste eines Tiefpaßgraphen, so schneiden sie sich auf der x-Achse in einem Punkt, welchen man als f_{grenz} definiert hat. Der eigentliche Funktionswert an dieser Stelle liegt jedoch 3dB tiefer, weshalb man die Grenzfrequenz auch an der Stelle definiert, wo die Ausgangsspannung um 3dB abgesunken ist, was genau $\frac{1}{\sqrt{2}}$ entspricht.

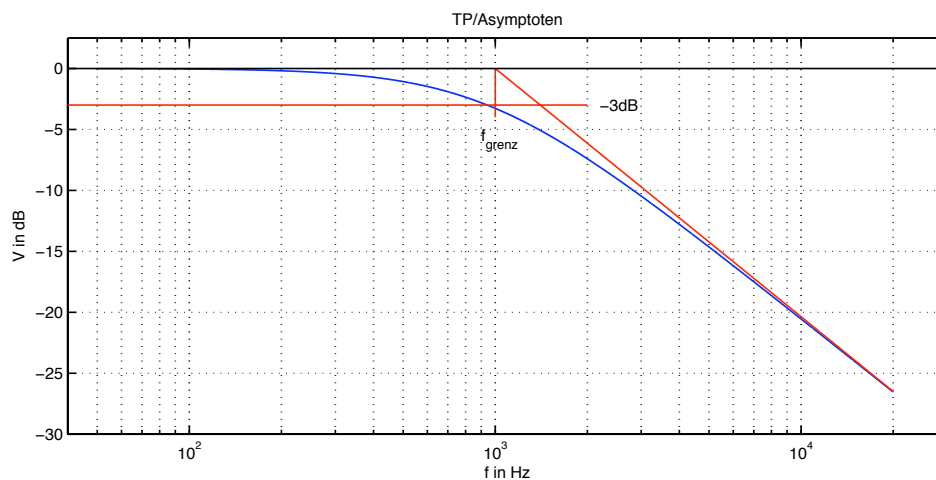


Abbildung 2: Definition der Grenzfrequenz

2 Durchführung

2.1 Grenzfrequenz

Es soll die komplexe Übertragungsfunktion eines RC-Tiefpasses ermittelt werden. Die Grenzfrequenz soll $f = 1\text{kHz}$ betragen. Da die Grenzfrequenz sich aus $\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$ berechnet, wird haben wir als $R = 1.5\text{k}\Omega$ und $C = 106.1\text{nF}$ gewählt.

2.2 Messung

f[Hz]	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500
$\hat{u}_A[\text{V}]$	10.4	10.3	10.3	10.32	10.2	10.1	10.1	9.9	9.7	8.69
$\Delta t[\text{ms}]$	0.172	0.199	0.160	0.174	0.163	0.135	0.157	0.127	0.12	0.132
f[Hz]	600	700	800	900	1000	2000	3000	4000	5000	6000
$\hat{u}_A[\text{V}]$	8.47	8.57	8.67	7.5	7.06	6.25	4.04	1.7	1.01	0.77
$\Delta t[\text{ms}]$	0.127	0.138	0.131	0.127	0.125	0.081	0.065	0.045	0.042	0.036
f[Hz]	7000	8000	9000	10000	20000	-	-	-	-	-
$\hat{u}_A[\text{V}]$	0.61	0.51	0.4	0.34	0.29	-	-	-	-	-
$\Delta t[\text{ms}]$	0.031	0.028	0.026	0.024	0.012	-	-	-	-	-

2.3 Grafische Darstellung der Ergebnisse

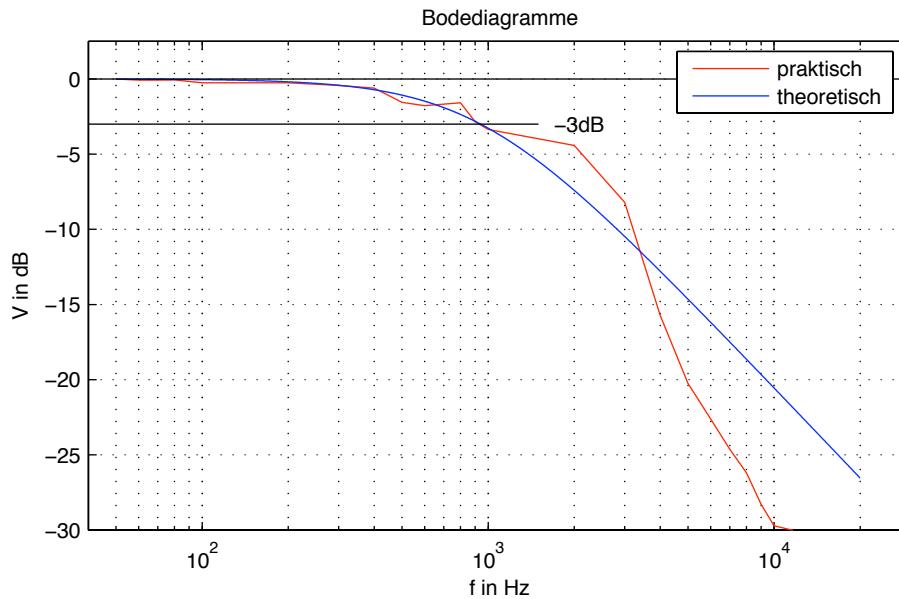


Abbildung 3: Amplitudenfrequenzgang

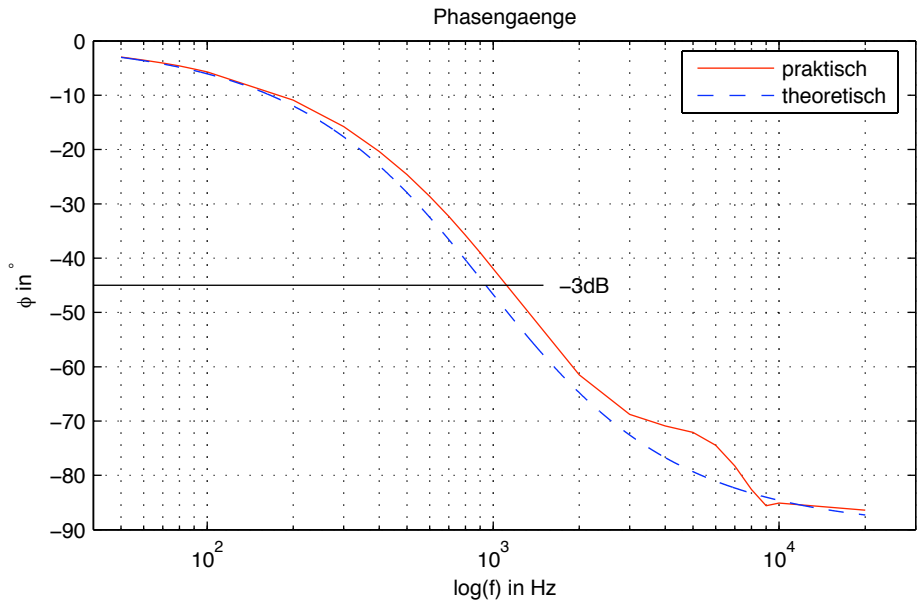


Abbildung 4: Phasengang

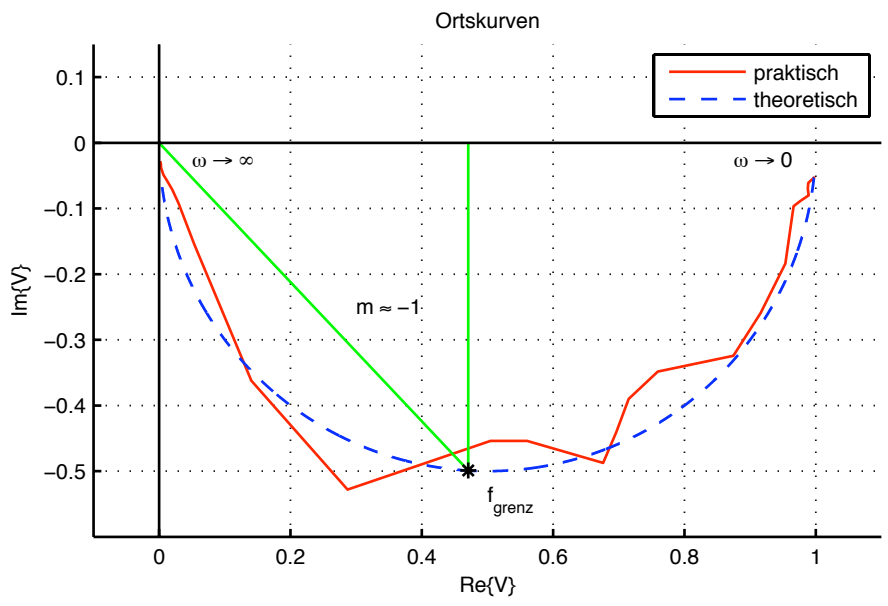


Abbildung 5: Ortskurven

3 Sprungantwort eines Kondensators

Die Sprungantwort kann man natürlich auch berechnen. Man erhält sie als Lösung der Differentialgleichung des Systems.

3.1 Herleitung/Lösung der Differentialgleichung - konventionell

$$Q = C \cdot U \quad (14)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} \quad (15)$$

$$U_R = i(t) \cdot R \quad (16)$$

Unter Zuhilfenahme des Kirchhoff'schen Maschensatzes:

$$U_0 = U_R + U_C \quad (17)$$

$$= \underbrace{R \cdot C}_{\tau} \frac{du}{dt} + U_C \quad (18)$$

$$\frac{U_0}{\tau} = \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} \quad (19)$$

Als Ansatz für U_c nimmt man ein Polynom 1. Grades:

$$\frac{U_0}{\tau} = A + \frac{1}{\tau}(At + B) \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\tau}A + At\frac{1}{\tau} + B\frac{1}{\tau} \quad (21)$$

$$0 = A \cdot t \cdot \frac{1}{\tau} \rightarrow \underline{\underline{A = 0}} \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau}U_0 = A + B\frac{1}{\tau} \rightarrow \underline{\underline{B = U_0}} \quad (23)$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } U_c = \underbrace{Ke^{-\frac{1}{\tau}t}}_{y_H} + \underbrace{U_0}_{y_P} \quad (24)$$

Mit der allg. Lsg. berechnen wir das Anfangswertproblem: Die Ladung zum $t_0 = 0$.

$$U_C(0) = 0 \quad (25)$$

$$U_{C_{AWP}}(0) = K \underbrace{e^{-\frac{1}{\tau} \cdot 0}}_{=1} + U_0 \quad (26)$$

$$U_{C_{AWP}}(0) = K + U_0 \quad (27)$$

$$U_{C_{AWP}}(0) = -U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} + U_0 \quad (28)$$

$$U_{C_{AWP}}(0) = \underline{\underline{U_0(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t})}} \quad (29)$$

3.2 Herleitung/Lösung der Differentialgleichung - Laplace

$$\frac{U_0}{\tau} = \frac{du_C}{dt} + \frac{U_C}{\tau} \quad (30)$$

$$\frac{U_0}{\tau} \frac{1}{s} = s \cdot U_C(s) - 0 + \frac{1}{\tau} U_C(s) \quad (31)$$

$$\frac{U_0}{\tau} \frac{1}{s} = U_C(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \quad (32)$$

$$U_C(s) = \frac{U_0}{s \cdot \tau \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} = \frac{U_0}{\tau} \left(\frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} \right) \quad (33)$$

$$U_C(t) = \frac{U_0}{\tau} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (34)$$

$$= \underline{\underline{U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}} \quad (35)$$

3.3 Grafische Überprüfung der Sprungantwort

Überprüfen kann man das Ergebnis beispielsweise am Oszilloskop durch geschickte Wahl der Triggerung und ein Rechtecksignal am Eingang des Tiefpasses. Hier kann man dann wiederum grafisch die Anstiegszeit ermitteln.

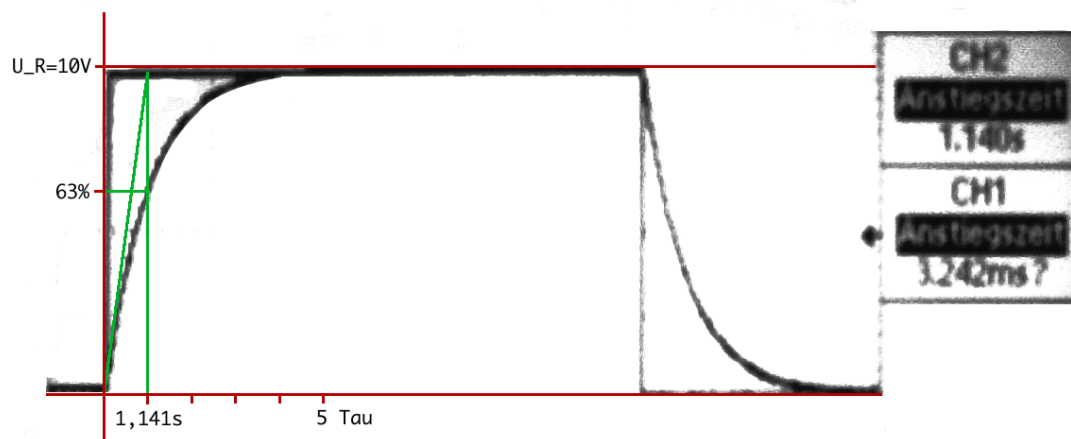


Abbildung 6: Sprungantwort RC-Tiefpaß

Anhand des Ladezustand kann man auch die Größe von τ bestimmen. Bei 1τ ist laut Definition bei ca. 63% (Siehe Gleichung 29). Von vollständiger Ladung des Kondensators geht man je nach Gemütslage des Autors bei ca. 5τ aus. Rechnerisch ergibt sich hier eine Ladung von 99.3% Die Anstiegszeit bis τ kann man gleich ablesen: 1.14s.

A Matlab-Quellen

A.1 Achse.m

```
1 %Achse
2
3 WerteVektor = axis;
4 hold on;
5 plot([WerteVektor(1) WerteVektor(2)],[0 0], 'k');
6 plot([0 0],[WerteVektor(3) WerteVektor(4)], 'k');
7 hold off;
```

A.2 messung.m

```
1 %messwerte
2 FREQ = [50 60 70 80 90 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
3         2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000 20000];
4 UA_dach = [10.4 10.3 10.3 10.32 10.2 10.1 10.1 9.9 9.7 8.69 8.47
5            8.57 8.67 7.5 7.06 6.25 4.04 1.7 1.01 0.77 0.61 0.51
6            0.4 0.34 0.29];
7 TEE = -1e-3 .* [0.172 0.199 0.160 0.174 0.163 0.135 0.157 0.127
8                0.12 0.132 0.127 0.138 0.131 0.127 0.125 0.081 0.065
9                0.045 0.042 0.036 0.031 0.028 0.026 0.024 0.012];
10
11 %berechnung des phasenwinkels...
12 PHI_norm = FREQ.*TEE*360;
13
14 %versuch der glättung der phasenwinkel
15 q=polyfit(FREQ,PHI_norm,5);
16 PHI = polyval(q,FREQ);
17
18 %bauelemente der schaltung
19 R = 1591; %1591 \Omega
20 C = 106.1e-9; %106.1 nF
21
22 w=[50:.1:20000];
23
24 %berechnung verstaerkung
25 V_DB = 20*log10(UA_dach ./ 10.4);
26 V = UA_dach ./ 10.4;
```

A.3 phase.m

```
1 messung
2
3 semilogx(FREQ,PHI,'r');
4
5 hold on;
6 grid on;
7
8 PHI2=-atan(2*pi*w*R*C)*180/pi;
9
10 semilogx(w,PHI2,'b--');
11
12 title 'Phasengaenge';
13 ylabel('\phi in ^\circ');
14 xlabel('log(f) in Hz');
15
16 legend('praktisch','theoretisch','Location','NorthEast')
17
18 plot([40 1500],[-45 -45], 'k');
19
20 text(1700,-45,'-3dB');
21
22 axis([40 30000 -90 0]);
23
24 Achse
```

A.4 bode.m

```
1 %import messwerte etc.
2 messung
3
4 %plot messwerte
5 semilogx(FREQ,V_DB,'r');
6
7 hold on;
8 grid on;
9
10 title 'Bodediagramme';
11 ylabel('V in dB');
12 xlabel('f in Hz');
13
14 %berechnung+plot referenzkurve
15 Va=1./((sqrt(1^2+(2*pi*w*R*C).^2));
16 V=20*log10(Va);
17 semilogx(w,V,'b');
18
19 legend('praktisch','theoretisch',[40 0 200 200]);
20
21 %plot der 3dB-Geraden
22 plot([40 1500],[-3 -3], 'k');
23
24 text(1700,-3,'-3dB');
25
26 hold on;
27 axis([40 30000 -45 2.5]);
28
29 Achse
```

A.5 ortskurve.m

```
1 %import messwerte etc.
2 messung
3
4 %berechnung ortskurvenparameter
5 REAL=cos(PHI*pi/180).*V;
6 IMAG=sin(PHI*pi/180).*V;
7
8 hold on;
9 grid on;
10 plot(REAL,IMAG,'r');
11
12 title 'Ortskurven';
13 ylabel('Im\{V\}');
14 xlabel('Re\{V\}');
15
16 z = 1./((j*2*pi*w*R*C) + 1);
17 plot(z,'b--');
18
19 grenz = 1/((j*2*pi*1000*R*C) + 1)
20
21 plot([0 real(grenz)],[0 imag(grenz)], 'g');
22 plot([real(grenz) real(grenz)],[0 imag(grenz)], 'g');
23
24 plot(grenz,'*k');
25 text(.5,-.55,'f_{grenz}');
26 text(.05,-.025,'\omega \rightarrow \infty');
27 text(.875,-.025,'\omega \rightarrow 0');
28 text(.3,-.25,'m \approx 1');
29
30 axis equal;
31 axis([-1.1 1.1 -.6 .15]);
32 Achse
33
34 legend('praktisch','theoretisch','Location','Best');
```

A.6 bodeasym.m

```
1 %import messwerte etc.
2 messung
3
4 title 'Bodediagramme';
5 ylabel('V in dB');
6 xlabel('f in Hz');
7
8 %berechnung+plot referenzkurve
9 Va=1./((sqrt(1^2+(2*pi*w*R*C).^2));
10 V=20*log10(Va);
11 semilogx(w,V,'b');
12
13 hold on;
14 grid on;
15
16 %plot der 3dB-Geraden
17 plot([40 2000],[-3 -3], 'r');
18
19 %asymptote
20 plot([1000 20000],[0 -26.5], 'r');
21
22 %plot der fg-Geraden
23 plot([1000 1000],[0 -4], 'r');
24
25 text(2200,-3,'-3dB');
26 text(900,-6,'f_{grenz}');
27
28 axis([40 30000 -30 2.5]);
29
30 Achse
```

A.7 rc.m4 (Erzeugung von [Abb. ??])

```
1 %m4 /Users/tix/Desktop/CM/pgf.m4 /Users/tix/Desktop/CM/libcct.m4
2   rc.m4 | dpic -g > rc.tex
3
4 .PS
5 cct_init
6 dimen_ = 0.85
7 elen = 0.85
8
9 Origin: Here
10     reversed('gap',up_ elen,,A); llabel(,U_e,)
11     resistor(right_ elen,E); rlabel(,R_1,)
12         dot
13     {
14         capacitor(down_ to (Here,Origin)); rlabel(,C_1,)
15         dot
16     }
17     line right_ elen*2/3
18     gap(down_ elen,,A); llabel(,U_a,)
19     line to Origin
21 .PE
```